

# L'evoluzione del litorale conseguente alla realizzazione di un pennello ortogonale alla linea di riva

Pasquale Filianoti

Università degli Studi di Reggio Calabria – Dipartimento di Meccanica e Materiali  
Loc. Feo di Vito – 89100 Reggio Calabria

## Riassunto

La realizzazione di un pennello altera la portata  $Q_s$  di materiale solido trasportato lungo costa e, di conseguenza, produce la deformazione del profilo del litorale. Nella memoria la portata  $Q_s$ , in presenza di un pennello ortogonale alla costa, viene calcolata schematizzando la spiaggia come una barriera verticale perfettamente assorbente. Lo schema viene applicato sia per il caso delle onde periodiche sia per il caso delle onde di vento. Quest'ultimo caso in particolare ha fornito i risultati più realistici, consentendo di cogliere le caratteristiche essenziali della deformazione.

## Introduzione

Qualsiasi intervento a difesa della costa realizzato per mezzo di strutture, siano esse radicate a terra come i pennelli o distaccate come le barriere parallele alla riva, provoca uno snaturamento del litorale. Il dimensionamento di tali strutture può definirsi ottimale quando esse, oltre all'azione di difesa, causano il minore impatto visivo. Nel caso dei pennelli ciò significa determinare la lunghezza, l'altezza, l'inclinazione e, nel caso di un sistema di pennelli, l'interasse, in maniera tale da consentire al materiale di fondo di accumularsi, di ricoprire la struttura, ed eventualmente di *bypassarla*. Purtroppo l'idrodinamica costiera già complessa da una parte, e la mancanza di dati dettagliati sul regime ondoso dall'altra, rendono estremamente difficile la previsione dell'evoluzione della costa da stabilizzare.

La ricerca sul campo, i modelli fisici e quelli matematici costituiscono ottimi strumenti di indagine, possedendo ciascuno precipue caratteristiche. I modelli matematici in particolare, presentano il vantaggio della economicità e della flessibilità. Inoltre una formulazione matematica semplificata consente di pervenire a soluzioni in forma chiusa. Le soluzioni analitiche permettono di isolare e comprendere gli aspetti essenziali di un problema in modo semplice e immediato a differenza di complessi approcci numerici, e, come è noto, non sono affette da problemi di stabilità e di convergenza tipici delle soluzioni numeriche. Nonostante ciò le soluzioni analitiche si rivelano inadeguate a fornire risultati quantitativi ed accurati in presenza di complesse geometrie al contorno, giacché l'insieme di equazioni che descrive tutti i fenomeni fisici coinvolti (ad es. rifrazione, riflessione, diffrazione) risulta troppo complicato da trattare analiticamente. Pertanto nella pratica progettuale risulta, fino ad oggi, più appropriato l'impiego di modelli numerici.

In questa nota si propone una soluzione analitica per la previsione della deformazione della linea di battigia conseguente alla realizzazione di strutture costiere. Questa soluzione può essere inquadrata nell'ambito della teoria ad una linea introdotta da Pelnard-Considère (1954). La novità della soluzione riguarda il calcolo della portata di materiale di fondo, che non viene eseguito, come di con-

suetto, a partire dalla nota espressione di Longuet-Higgins (1970), valida per onde progressive, bensì viene effettuato ricavando l'espressione analitica delle *radiation stresses* per il campo di onde soggetto a diffrazione.

### Analisi globale del campo di moto

#### L'equazione di conservazione dei sedimenti

Nella teoria ad una linea si assume che il materiale di fondo si muova solo fino ad una certa profondità  $d_c$ , denominata profondità di chiusura, e che il profilo del fondo possa subire soltanto traslazioni verso mare o verso terra senza cambiare di forma. Con queste ipotesi, tutte le batimetriche soggette ad evoluzione, e cioè quelle comprese tra la battigia e la profondità di chiusura, si deformano allo stesso modo. La batimetrica più semplice da rilevare sperimentalmente è la linea di battigia (batimetrica zero), e pertanto viene comunemente assunta come *linea* di riferimento.

L'equazione di continuità applicata al materiale di fondo che, nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ , attraversa un tratto di costa compreso tra due sezioni trasversali distanti  $\delta x$  tra loro, può essere espressa nella seguente forma

$$\delta x \Delta y (d_c + \tilde{d}) = - \frac{\partial Q_s}{\partial x} \delta x \Delta t. \quad [1]$$

Con riferimento alla Figura 1 è immediato verificare che il primo membro della [1] rappresenta la variazione di volume di materiale di fondo subita dal tratto di costa  $\delta x$  nell'intervallo  $\Delta t$ , e il secondo membro rappresenta la differenza tra il volume di materiale di fondo entrante ed il volume di materiale di fondo uscente, nell'intervallo  $\Delta t$ , dalle sezioni trasversali che delimitano il predetto tratto. L'eq. [1] assume, per  $\Delta t \rightarrow 0$ , la forma

$$\delta x \frac{\partial y}{\partial t} (d_c + \tilde{d}) = - \frac{\partial Q_s}{\partial x} \delta x, \quad [2]$$

ovvero, dopo aver semplificato e riordinato, la forma

$$\frac{\partial y}{\partial t} = - \frac{1}{(d_c + \tilde{d})} \frac{\partial Q_s}{\partial x}. \quad [3]$$

#### L'equazione del trasporto litoraneo

La portata  $Q_s$  è messa in movimento dalla forza tangenziale che il moto ondoso esercita sul fondo del mare. Infatti è necessario che uno strato di sabbia scorra lungo-costa per equilibrare l'azione di trascinamento dell'acqua. Si tratta di un equilibrio dinamico, consentito dalle tensioni di attrito che si sviluppano lungo la superficie di scorrimento. Pertanto, per equilibrare la forza media unitaria  $\langle f_{ax} \rangle$  che l'acqua esercita sul fondo deve scorrere uno strato di sabbia dal peso per unità di lunghezza lungo-costa

$$P = \langle f_{ax} \rangle / \mu, \quad [4]$$

dove  $\mu$  è la tangente dell'angolo di attrito interno del materiale di fondo. L'area  $A$  della sezione trasversale dello strato mobile è proporzionale alla forza  $\langle f_{ax} \rangle$ :

$$A = \frac{\langle f_{ax} \rangle}{\mu(\gamma_s - \gamma_a)(1-p)}, \quad [5]$$

dove  $\gamma_s$  è il peso specifico dei sedimenti,  $\gamma_a$  è il peso specifico dell'acqua e  $p$  è la porosità dei sedimenti.

La portata di materiale di fondo  $Q_s$  è pari al prodotto dell'area  $A$  per la velocità  $v_s$  di avanzamento dei sedimenti:

$$Q_s = Av_s. \quad [6]$$

Comunemente (cfr. Longuet-Higgins 1970, Dean 1992) si ritiene  $v_s$  proporzionale alla celerità dell'onda al frangimento, e pertanto esprimibile nella forma

$$v_s = k\sqrt{gd_b}, \quad [7]$$

dove  $d_b$  è la profondità al frangimento, e  $k$  un fattore che dipende dalle dimensioni dei sedimenti.

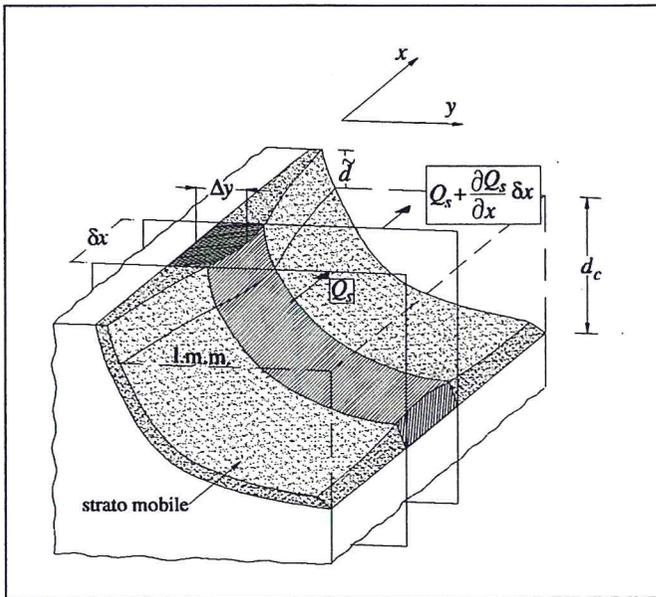


Figura 1 - L'avanzamento  $\Delta y$  (o l'arretramento, nel caso  $\Delta y < 0$ ) della battigia è causato dalla variazione lungo-costa della portata di materiale di fondo  $Q_s$ .

Infine, sostituendo l'espressione di  $A$  e l'espressione di  $v_s$  nella [6] si arriva alla relazione

$$Q_s = \frac{k}{\mu(\gamma_s - \gamma_a)(1 - p)} \langle f_{ax} \rangle \sqrt{gd_b} \quad [8]$$

la quale evidenzia la dipendenza della portata da due termini: la forza  $\langle f_{ax} \rangle$  e la velocità  $\sqrt{gd_b}$ . Boccotti (1997) ha recentemente dimostrato, in seno ad una trattazione analitica rigorosa del problema della deformazione dei litorali, che la  $Q_s$  dipende fondamentalmente dal termine  $\langle f_{ax} \rangle$ , e che pertanto l'espressione [8] può essere convenientemente ridotta alla forma

$$Q_s \cong \text{cost} \langle f_{ax} \rangle \quad [9]$$

senza alterare le caratteristiche essenziali del problema. Di conseguenza anche l'eq. [3] può essere semplificata nella forma

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\text{cost} \frac{\partial \langle f_{ax} \rangle}{\partial x}, \quad [10]$$

dove le costanti si intendono positive.

Esplicitiamo adesso il legame tra la forza  $\langle f_{ax} \rangle$  e le grandezze caratteristiche del moto ondoso.

**Lo schema di barriera assorbente**

Schematizziamo il pennello come una parete verticale riflettente e la spiaggia come una barriera assorbente (Fig. 2). Il comportamento della barriera è ideale, tale cioè da non alterare il campo di moto davanti a se; essa dissipa tutta l'energia incidente, non riflette e non trasmette. La profondità, costante nello schema (Fig. 2b), viene assunta pari alla profondità media tra struttura e battigia, e può essere determinata facilmente se si interpreta il profilo del fondale con l'equazione (Dean, 1992)

$$d = A y^{2/3}, \tag{11}$$

dove  $d$  è la profondità del fondo ed  $A$  un fattore che dipende dalla granulometria dei sedimenti. Utilizzando l'eq. [11] la profondità media risulta

$$\bar{d} = \frac{3}{5} A b^{2/3}, \tag{12}$$

dove  $b$  è la lunghezza del pennello.

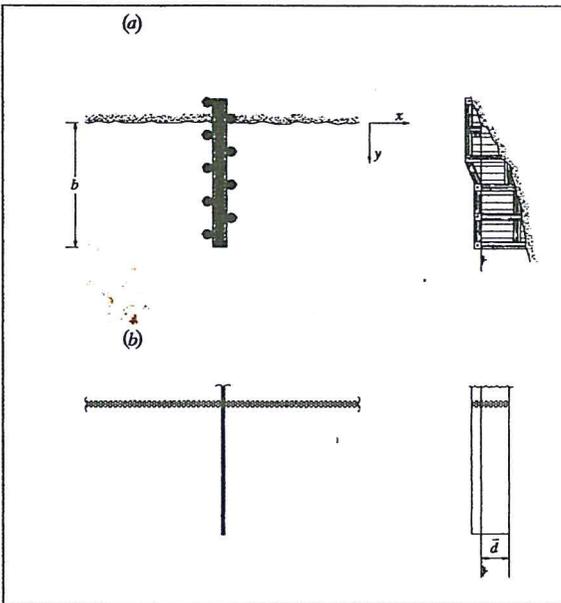


Figura 2 - (a) Esempio di pennello impermeabile. (b) Il pennello viene schematizzato come una parete verticale riflettente, e la spiaggia come una barriera perfettamente assorbente.

Consideriamo un volume di controllo  $V$  di larghezza  $\delta x$  delimitato dal fondo e da quattro pareti verticali indefinitamente alte, una delle quali a contatto con l'assorbente (Fig. 3a), e imponiamo la condizione di equilibrio idrodinamico

$$G + \Pi = M_u - M_e + I, \tag{13}$$

dove

- $G$  è il peso della massa d'acqua contenuta nel volume  $V$ ;
- $\Pi$  è il risultante delle forze applicate sulla superficie di controllo;
- $M_u$  ed  $M_e$  sono le portate di quantità di moto rispettivamente uscente ed entrante in  $V$ ;
- $I$  è l'inerzia locale.

La [13] è valida in qualsiasi istante di tempo, e quindi è valida anche in media:

$$\langle \mathbf{G} \rangle + \langle \Pi \rangle = \langle \mathbf{M}_u \rangle - \langle \mathbf{M}_e \rangle, \quad [14]$$

dove il simbolo  $\langle \cdot \rangle$  indica l'operazione di media

$$\langle f(t) \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad [15]$$

e dove il termine di inerzia locale  $\mathbf{I}$  si annulla nell'operazione di media rispetto al tempo.

Per ipotesi il moto è ideale fino alla barriera assorbente, quindi la  $\langle \Pi_x^{\textcircled{3}} \rangle$  (componente  $x$  della forza media agente sul piano verticale ③) è uguale a zero, ed inoltre, sempre per ipotesi, la barriera è *perfettamente* assorbente, per cui anche la  $\langle M_x^{\textcircled{4}} \rangle$  (componente  $x$  della portata media di quantità di moto attraverso il piano verticale ④) è uguale a zero. Pertanto l'eq. [14] proiettata lungo l'asse  $x$  assume la forma

$$\langle \Pi_x^{\textcircled{1}} \rangle + \langle \Pi_x^{\textcircled{2}} \rangle + \langle f_{bx} \rangle \delta x = - \langle M_x^{\textcircled{1}} \rangle + \langle M_x^{\textcircled{2}} \rangle + \langle M_x^{\textcircled{3}} \rangle, \quad [16]$$

dove  $\langle f_{bx} \rangle$  è la forza media unitaria esercitata dalla barriera assorbente.

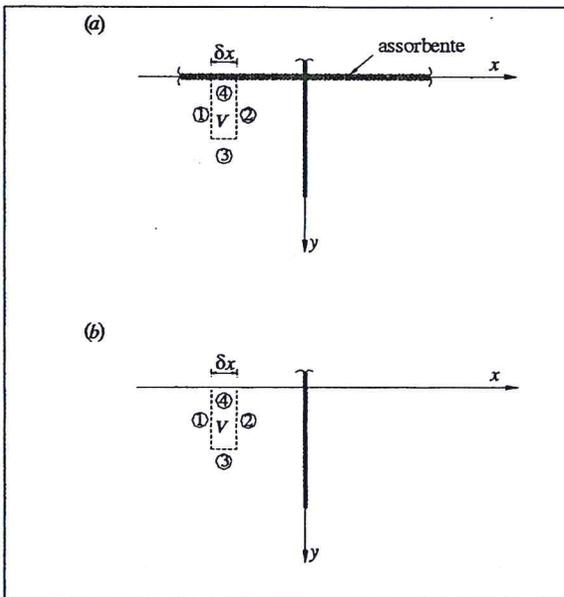


Figura 3 - (a) Il volumetto di controllo  $V$  si appoggia con il lato ④ all'assorbente. (b) Lo stesso volumetto  $V$  senza barriera assorbente.

La condizione di equilibrio dello stesso volume (Fig. 3b) in assenza della barriera assorbente assume la forma

$$\langle \Pi_x^{\textcircled{1}} \rangle + \langle \Pi_x^{\textcircled{2}} \rangle = - \langle M_x^{\textcircled{1}} \rangle + \langle M_x^{\textcircled{2}} \rangle + \langle M_x^{\textcircled{3}} \rangle - \langle M_x^{\textcircled{4}} \rangle; \quad [17]$$

confrontando l'eq. [16] con la [17] si ottiene

$$\langle f_{bx} \rangle \delta x = \langle M_x^{\textcircled{4}} \rangle, \quad [18]$$

ovvero

$$\langle f_{ax} \rangle \delta x = - \langle M_x^{\textcircled{4}} \rangle, \quad [19]$$

dove  $\langle f_{ax} \rangle$  è la forza esercitata dall'acqua sulla barriera, e coincide, per ipotesi, con la forza esercitata dall'acqua sul fondale.

La portata di quantità di moto  $\langle M_x^\ominus \rangle$  è definita da

$$\langle M_x^\ominus \rangle \equiv \delta x \rho \left\langle \int_{-d}^{\eta} v_x v_y dz \right\rangle, \quad [20]$$

e può essere ricavata analiticamente utilizzando la soluzione di Penny e Price (1952) per onde interagenti con una parete verticale di lunghezza semi-infinita.

**Analisi puntuale del campo di moto**  
**La soluzione di Penny e Price (1952)**

Le espressioni al primo ordine di Stokes dell'elevazione d'onda e del potenziale di velocità del campo di onde intorno ad una parete verticale semi-infinita, in coordinate cilindriche sono

$$\eta(r, \alpha, t) = \frac{H}{2} [F(r, \alpha; \omega, \theta) \cos(\omega t) + G(r, \alpha; \omega, \theta) \sin(\omega t)], \quad [21a]$$

$$\phi(r, \alpha, z, t) = g \frac{H}{2} \omega^{-1} \frac{\cosh[k(d+z)]}{\cosh(kd)} [G(r, \alpha; \omega, \theta) \cos(\omega t) - F(r, \alpha; \omega, \theta) \sin(\omega t)], \quad [21b]$$

con

$$F(r, \alpha; \omega, \theta) \equiv A(u_1) \cos q_1 + A(u_2) \cos q_2 - B(u_1) \sin q_1 - B(u_2) \sin q_2, \quad [22a]$$

$$G(r, \alpha; \omega, \theta) \equiv A(u_1) \sin q_1 + A(u_2) \sin q_2 + B(u_1) \cos q_1 + B(u_2) \cos q_2, \quad [22b]$$

$$A(u) \equiv \frac{1}{2} \left[ 1 + \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) dx + \int_0^u \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) dx \right], \quad [22c]$$

$$B(u) \equiv \frac{1}{2} \left[ \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) dx - \int_0^u \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) dx \right], \quad [22d]$$

$$u_1 \equiv 2\sqrt{kr/\pi} \sin\left[\frac{1}{2}(\alpha - \theta)\right], \quad u_2 \equiv -2\sqrt{kr/\pi} \sin\left[\frac{1}{2}(\alpha + \theta)\right], \quad [22e]$$

$$q_1 \equiv kr \cos(\alpha - \theta), \quad q_2 \equiv -kr \cos(\alpha + \theta), \quad [22f]$$

e dove  $\theta$  è l'angolo compreso tra la direzione di propagazione e la parete (Fig. 4), e  $z$  l'asse verticale orientato verso l'alto e con origine sul livello medio del mare.

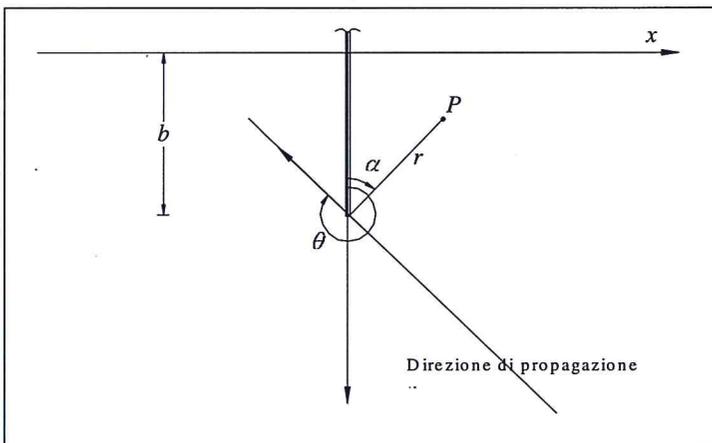


Figura 4 - Schema di riferimento per il campo di onde intorno ad una parete riflettente semi-infinita (equazioni 21 e 22).

Le componenti cartesiane della velocità orbitale sono definite da

$$v_x \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad [23a]$$

$$v_y \equiv \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad [23b]$$

e per esplicitarle, tenuto conto che il potenziale (eq. 21b) è espresso in coordinate cilindriche, bisogna ricorrere alla regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad [24a]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y}. \quad [24b]$$

Le espressioni delle derivate  $\partial r/\partial x$ ,  $\partial r/\partial y$ ,  $\partial \alpha/\partial x$  e  $\partial \alpha/\partial y$  si ricavano facilmente dalle relazioni

$$r = \sqrt{(b-y)^2 + x^2}, \quad [25a]$$

$$\tan \alpha = \frac{x}{b-y}, \quad [25b]$$

le quali esprimono, per la configurazione in esame (Fig. 4), il legame tra le coordinate polari e le coordinate cartesiane. Le espressioni di  $\partial \phi/\partial r$  e  $\partial \phi/\partial \alpha$  si ottengono dalla [21b]:

$$\frac{\partial \phi(r, \alpha, z, t)}{\partial r} = g \frac{H}{2} \omega^{-1} \frac{\cosh[k(\bar{d} + z)]}{\cosh(k\bar{d})} \left[ \frac{\partial G(r, \alpha; \omega, \theta)}{\partial r} \cos(\omega t) - \frac{\partial F(r, \alpha; \omega, \theta)}{\partial r} \sin(\omega t) \right], [26a]$$

$$\frac{\partial \phi(r, \alpha, z, t)}{\partial \alpha} = g \frac{H}{2} \omega^{-1} \frac{\cosh[k(\bar{d} + z)]}{\cosh(k\bar{d})} \left[ \frac{\partial G(r, \alpha; \omega, \theta)}{\partial \alpha} \cos(\omega t) - \frac{\partial F(r, \alpha; \omega, \theta)}{\partial \alpha} \sin(\omega t) \right]. [26b]$$

Qui le derivate parziali di  $F$  e  $G$  non sono state riportate in forma esplicita perché alquanto lunghe. Proprio per tale motivo si è ritenuto opportuno procedere ad un controllo (Filianoti, 1995). Allo scopo si è verificato che la condizione istantanea di continuità fosse soddisfatta per svariati volumi di controllo in seno al campo di moto.

A questo punto, esplicitando le equazioni [23], si perviene alle espressioni

$$v_x = g \frac{H}{2} \omega^{-1} \frac{\cosh[k(\bar{d} + z)]}{\cosh(k\bar{d})} \left\{ \left[ \frac{\partial G}{\partial r} \sin \alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \alpha} \cos \alpha \right] \cos(\omega t) + \left[ \frac{\partial F}{\partial r} \sin \alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cos \alpha \right] \sin(\omega t) \right\}, \quad [27a]$$

$$v_y = g \frac{H}{2} \omega^{-1} \frac{\cosh[k(\bar{d} + z)]}{\cosh(k\bar{d})} \left\{ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \alpha} \sin \alpha - \frac{\partial G}{\partial r} \cos \alpha \right] \cos(\omega t) + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \sin \alpha - \frac{\partial F}{\partial r} \cos \alpha \right] \sin(\omega t) \right\}, \quad [27b]$$

le quali sostituite nell'eq. [20] di  $\langle M_x^\circ \rangle$ , e considerato che il campo di integrazione rispetto a  $z$  può essere ridotto da  $(-\bar{d}, \eta)$  a  $(-\bar{d}, 0)$  in quanto la funzione integranda è di ordine  $H^2$ , portano a

$$\begin{aligned} \langle M_x^\circ \rangle = & \delta x \rho g^2 \frac{H^2}{4} \omega^{-2} \frac{1}{\cosh^2(k\bar{d})} \int_{-\bar{d}}^0 \cosh^2[k(\bar{d} + z)] dz \left\langle \left[ \frac{\partial G}{\partial r} \text{sen} \alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \alpha} \cos \alpha \right] \cdot \right. \\ & \cdot \cos(\omega t) + \left[ \frac{\partial F}{\partial r} \text{sen} \alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cos \alpha \right] \text{sen}(\omega t) \left. \right\} \left\{ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \alpha} \text{sen} \alpha - \frac{\partial G}{\partial r} \cos \alpha \right] \cos(\omega t) + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \text{sen} \alpha - \frac{\partial F}{\partial r} \cos \alpha \right] \text{sen}(\omega t) \right\} \rangle, \end{aligned} \quad [28]$$

da cui, sviluppando l'operazione di media temporale e risolvendo l'integrale rispetto a  $z$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \langle M_x^\circ \rangle = & \delta x \rho g \frac{H^2}{16} k^{-2} \left[ 1 + \frac{2k\bar{d}}{\sinh(2k\bar{d})} \right] \left\{ \frac{1}{2r^2} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \text{sen}(2\alpha) + \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial G}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) \cos(2\alpha) - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 \right] \text{sen}(2\alpha) \right\}. \end{aligned} \quad [29]$$

Infine dalla relazione [19] segue l'espressione di  $\langle f_{ax} \rangle$ , la quale può essere proposta nella forma adimensionale

$$\begin{aligned} \frac{\langle f_{ax} \rangle}{\langle f_{ax} \rangle} = & \frac{2k^{-2}}{\text{sen}(2\theta)} \left\{ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial G}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) \cos(2\alpha) - \frac{1}{2r^2} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \text{sen}(2\alpha) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 \right] \text{sen}(2\alpha) \right\}, \end{aligned} \quad [30]$$

dove

$$\langle f_{ax} \rangle = \frac{1}{32} \rho g H^2 \left[ 1 + \frac{2k\bar{d}}{\sinh(2k\bar{d})} \right] \text{sen}(2\theta). \quad [31]$$

L'espressione [31] (Longuet-Higgins, 1970) rappresenta la forza media unitaria esercitata dal campo di onde incidenti (le onde che ci sarebbero se non ci fosse il pennello) sull'unità di lunghezza della barriera assorbente (fondale).

### La diffrazione di uno stato di mare

L'elevazione d'onda e il potenziale di velocità di uno stato di mare soggetto a diffrazione furono introdotti da Boccotti (1988), e possono essere espressi nella forma

$$\eta(r, \alpha, t) = \sum_{i=1}^N a_i [F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i) \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) + G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i) \text{sen}(\omega_i t + \varepsilon_i)], \quad [32a]$$

$$\begin{aligned} \phi(r, \alpha, z, t) = & g \sum_{i=1}^N a_i \omega_i^{-1} \frac{\cosh[k_i(d+z)]}{\cosh(k_i d)} [G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i) \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) + \\ & - F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i) \text{sen}(\omega_i t + \varepsilon_i)], \end{aligned} \quad [32b]$$

con

$$gk_i \tanh(k_i d) = \omega_i^2. \quad [33]$$

In base alla teoria degli stati di mare (Longuet-Higgins 1963, Phillips 1967) si assume che il numero  $N$  di componenti elementari tenda ad infinito;

gli angoli di fase  $\varepsilon_i$  siano uniformemente distribuiti in  $(0, 2\pi)$ , ed il valore di  $\varepsilon_i$  sia stocasticamente indipendente dal valore di  $\varepsilon_j$  se  $i \neq j$ ;

le ampiezze  $a_i$ , le frequenze  $\omega_i$  e gli angoli di fase  $\varepsilon_i$  siano distribuiti in modo tale da formare un assegnato spettro  $S(\omega, \theta)$ :

$$S(\omega, \theta) \delta\omega \delta\theta \equiv \sum_i \frac{1}{2} a_i^2 \quad \text{per } i \ni \begin{cases} \omega < \omega_i < \omega + \delta\omega, \\ \theta < \theta_i < \theta + \delta\theta. \end{cases} \quad [34]$$

Un'espressione che interpreta la caratteristica forma degli spettri delle onde di vento è quella proposta dai ricercatori del progetto JONSWAP (Hasselmann e al., 1973) insieme con la funzione di dispersione direzionale di tipo  $\cos^{2n}$  (Mitsuyasu e al., 1975):

$$S(\omega, \theta) = \alpha g^2 \omega^{-5} \exp\left[-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega_d}{\omega}\right)^4\right] \exp\left\{\ln \gamma \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_d)^2}{2\sigma^2 \omega_d^2}\right]\right\} K(n) \cos^{2n}\left[\frac{1}{2}(\theta - \theta_d)\right], \quad [35]$$

dove

$$n \begin{cases} = n_o (\omega/\omega_d)^5 & \text{se } \omega \leq \omega_d, \\ = n_o (\omega_d/\omega)^{2.5} & \text{se } \omega > \omega_d, \end{cases} \quad [36]$$

e  $K(n)$  è il fattore normalizzante

$$K(n) \equiv \left[ \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \frac{1}{2} \theta \, d\theta \right]^{-1}. \quad [37]$$

In seguito assumeremo per i tre parametri di forma  $\gamma$ ,  $\sigma$ , e  $n_o$  i seguenti valori caratteristici

$$\gamma = 3, \quad \sigma = 0.08, \quad n_o = 20.$$

Boccotti (1988) dimostrò che il campo di onde [32] rappresenta un processo aleatorio, gaussiano non omogeneo, ricavò i coefficienti di diffrazione di tale campo, ed applicò la teoria di quasi-determinismo per prevedere i modi caratteristici di formazione di onde molto alte in punti assegnati sia davanti sia a tergo della parete.

Quanto alle componenti di velocità, esse si ottengono eseguendo gli stessi passaggi che hanno portato alle [27], l'unica differenza è che va utilizzata l'espressione [32b] di  $\phi$  al posto dell'espressione [21b]. Il risultato è

$$v_x(r, \alpha, \bar{x}, t) = g \sum_{i=1}^N a_i \omega_i^{-1} \frac{\cosh[k_i(\bar{d} + \bar{x})]}{\cosh(k_i \bar{d})} \left\{ \left[ \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial r} \text{sen } \alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial \alpha} \text{cos } \alpha \right] \cdot \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) + \left[ \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial r} \text{sen } \alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial \alpha} \text{cos } \alpha \right] \text{sen}(\omega_i t + \varepsilon_i) \right\}, \quad [38a]$$

$$v_y(r, \alpha, \bar{x}, t) = g \sum_{i=1}^N a_i \omega_i^{-1} \frac{\cosh[k_i(\bar{d} + \bar{x})]}{\cosh(k_i \bar{d})} \left\{ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial \alpha} \text{sen } \alpha - \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial r} \text{cos } \alpha \right] \cdot \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial \alpha} \text{sen } \alpha - \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial r} \text{cos } \alpha \right] \text{sen}(\omega_i t + \varepsilon_i) \right\}, \quad [38b]$$

e, di conseguenza, l'espressione della portata media di quantità di moto  $\langle M_x^\ominus \rangle$  diventa

$$\begin{aligned} \langle M_x^\ominus(r, \alpha) \rangle = & \delta x \rho g^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \omega_i^{-1} \omega_j^{-1} \left\langle \left[ \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial r} \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial \alpha} \operatorname{cos} \alpha \right] \cdot \right. \\ & \cdot \left. \operatorname{cos}(\omega_i t + \varepsilon_i) + \left[ \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial r} \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial \alpha} \operatorname{cos} \alpha \right] \operatorname{sen}(\omega_i t + \varepsilon_i) \right\rangle \cdot \\ & \cdot \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_j, \theta_j)}{\partial \alpha} \operatorname{sen} \alpha - \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_j, \theta_j)}{\partial r} \operatorname{cos} \alpha \right] \operatorname{cos}(\omega_j t + \varepsilon_j) + \\ & + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_j, \theta_j)}{\partial \alpha} \operatorname{sen} \alpha - \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_j, \theta_j)}{\partial r} \operatorname{cos} \alpha \right] \operatorname{sen}(\omega_j t + \varepsilon_j) \Bigg\rangle \cdot \\ & \cdot \frac{1}{\operatorname{cosh}(k_i \bar{d}) \operatorname{cosh}(k_j \bar{d})} \int_{-\bar{d}}^0 \operatorname{cosh}[k_i(\bar{d} + \zeta)] \operatorname{cosh}[k_j(\bar{d} + \zeta)] d\zeta, \end{aligned} \quad [39]$$

da cui, eseguendo l'operazione di media temporale e tenendo conto che  $\omega_i \neq \omega_j$  se  $i \neq j$ , si arriva a

$$\begin{aligned} \langle M_x^\ominus(r, \alpha) \rangle = & \delta x \rho g^2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} a_i^2 \omega_i^{-2} \left\{ \frac{1}{2r^2} \left[ \left( \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \operatorname{sen}(2\alpha) + \right. \\ & - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial r} \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial \alpha} + \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial r} \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial \alpha} \right) \operatorname{cos}(2\alpha) + \\ & \left. - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial r} \right)^2 \right] \operatorname{sen}(2\alpha) \right\} \frac{1}{\operatorname{cosh}^2(k_i \bar{d})} \int_{-\bar{d}}^0 \operatorname{cosh}^2[k_i(\bar{d} + \zeta)] d\zeta \end{aligned} \quad [40]$$

Di qui, risolvendo l'integrale rispetto a  $\zeta$  e utilizzando la relazione [33], si ottiene

$$\begin{aligned} \langle M_x^\ominus(r, \alpha) \rangle = & \delta x \rho g \sum_{i=1}^N \frac{1}{4} a_i^2 k_i^{-2} \left\{ \frac{1}{2r^2} \left[ \left( \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \operatorname{sen}(2\alpha) + \right. \\ & - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial r} \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial \alpha} + \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial r} \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial \alpha} \right] \operatorname{cos}(2\alpha) + \\ & \left. - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial G(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial F(r, \alpha; \omega_i, \theta_i)}{\partial r} \right)^2 \right] \operatorname{sen}(2\alpha) \right\} \left[ 1 + \frac{2k\bar{d}}{\operatorname{senh}(2k\bar{d})} \right]. \end{aligned} \quad [41]$$

Quindi, tenendo conto della definizione [34], l'espressione [41] può essere espressa in termini dello spettro  $S(\omega, \theta)$  del campo di onde che ci sarebbe in assenza di parete:

$$\begin{aligned} \langle M_x^\ominus(r, \alpha) \rangle = & \delta x \frac{1}{2} \rho g \int_0^\infty \int_0^{2\pi} S(\omega, \theta) k^{-2} \left[ 1 + \frac{2k\bar{d}}{\operatorname{senh}(2k\bar{d})} \right] \left\{ \frac{1}{2r^2} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \operatorname{sen}(2\alpha) + \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial G}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) \operatorname{cos}(2\alpha) - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 \right] \operatorname{sen}(2\alpha) \right\} d\theta d\omega. \end{aligned} \quad [42]$$

Infine l'espressione adimensionale della forza  $\langle f_{ax} \rangle$  risulta

$$\begin{aligned} \frac{\langle f_{ax} \rangle}{\langle f_{ox} \rangle} = & 2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} S(\omega, \theta) k^{-2} \left[ 1 + \frac{2k\bar{d}}{\sinh(2k\bar{d})} \right] \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 \right] \sin(2\alpha) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial G}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) \cos(2\alpha) - \frac{1}{2r^2} \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \sin(2\alpha) \right\} d\theta d\omega / \\ & \int_0^\infty \int_0^{2\pi} S(\omega, \theta) \left[ 1 + \frac{2k\bar{d}}{\sinh(2k\bar{d})} \right] \sin(2\theta) d\theta d\omega, \end{aligned} \quad [43]$$

dove  $\langle f_{ox} \rangle$  questa volta è dato da

$$\langle f_{ox} \rangle = \frac{1}{4} \rho g \int_0^\infty \int_0^{2\pi} S(\omega, \theta) \left[ 1 + \frac{2k\bar{d}}{\sinh(2k\bar{d})} \right] \sin(2\theta) d\theta d\omega, \quad [44]$$

e rappresenta la forza media unitaria esercitata dal campo delle onde incidenti (il campo che ci sarebbe se la parete non ci fosse) sull'unità di lunghezza della barriera assorbente.

Gli integrali doppi dell'eq. [43] rappresentano l'operazione-tipo che si incontra nell'analisi degli stati di mare. Essi trovano conveniente soluzione per via numerica sostituendo la frequenza  $\omega$  con la variabile adimensionale  $w = \omega/\omega_d$ . Una dettagliata esposizione di questo criterio e di alcune tecniche per velocizzare il calcolo è stata fornita recentemente da Boccotti (1997).

## Risultati

### L'andamento della componente lungo-costa della forza

La Figura 5 mostra l'andamento del rapporto  $\langle f_{ax} \rangle / \langle f_{ox} \rangle$  in funzione dell'ascissa  $x$  lungo-costa. Il pennello si estende lungo il semiasse positivo delle  $y$ , ed ha una lunghezza relativa  $b/L$  (lunghezza pennello / lunghezza d'onda) pari a 1.

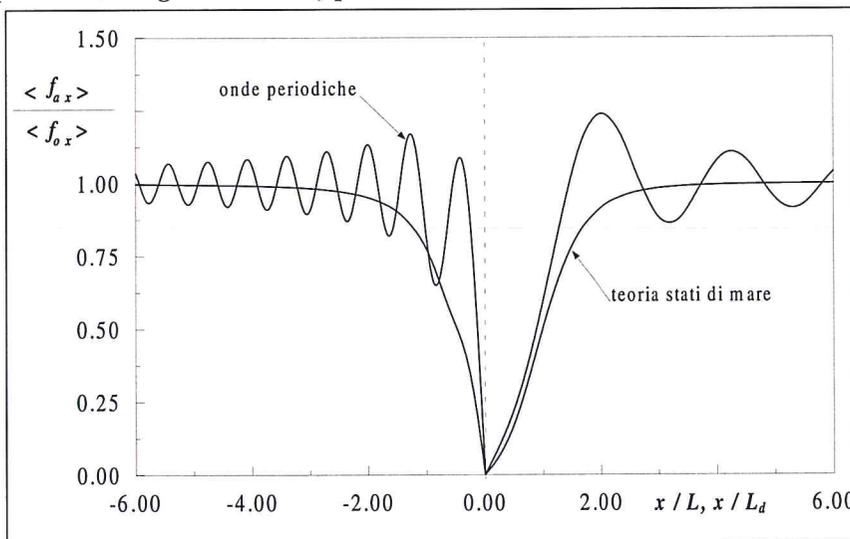


Figura 5 - Rapporto  $\langle f_{ax} \rangle / \langle f_{ox} \rangle$  in funzione dell'ascissa  $x$  lungo-costa. I dati delle curve sono:  $b/L = 1$ ,  $\bar{d}/L = 0.1$  e  $\theta = 30^\circ$  nel caso delle onde periodiche;  $b/L_d = 1$ ,  $\bar{d}/L_d = 0.1$  e  $\theta_d = 30^\circ$  nel caso delle onde di vento. [ $\langle f_{ax} \rangle$  = forza media per unità di lunghezza esercitata dalle onde sulla spiaggia in presenza del pennello;  $\langle f_{ox} \rangle$  = stessa grandezza in assenza del pennello.]

Nel caso delle onde di vento si intende  $b/L_d = 1$  (dove  $L_d$  è la lunghezza d'onda dominante dello spettro). La direzione di propagazione  $\theta$  è inclinata di  $30^\circ$  rispetto al pennello. Nel caso delle onde di vento si intende  $\theta_d = 30^\circ$  (dove  $\theta_d$  è la direzione di propagazione dominante dello spettro). Come si vede le differenze tra onde periodiche e onde di vento sono davvero notevoli. Infatti nel caso delle onde di vento la forza  $\langle f_{ax} \rangle$  cresce monotonamente da zero, in corrispondenza del pennello dove la  $v_x$  è nulla, fino a raggiungere, già a distanze di poche lunghezze dal pennello stesso, un valore costante pari a quello della forza  $\langle f_{ox} \rangle$  esercitata sull'assorbente in assenza del pennello. Invece nel caso delle onde periodiche la forza  $\langle f_{ax} \rangle$  presenta delle oscillazioni intorno al valore della forza  $\langle f_{ox} \rangle$  di ampiezza decrescente via via che ci si allontana dal pennello stesso. Questa marcata differenza tra onde periodiche e onde di vento è dovuta all'estensione indefinitamente lunga dei fronti delle onde periodiche, i quali risultano perturbati a causa dell'impatto con la testata del pennello fino a notevole distanza da esso. Le caratteristiche essenziali evidenziate dalla Figura 5 sono del tutto generali come si può evincere dalla Figura 6 la quale corrisponde al caso di un pennello lungo  $2L$  ( $2L_d$  nel caso delle onde di vento) e attaccato da onde inclinate di  $10^\circ$  rispetto alla linea di battigia.

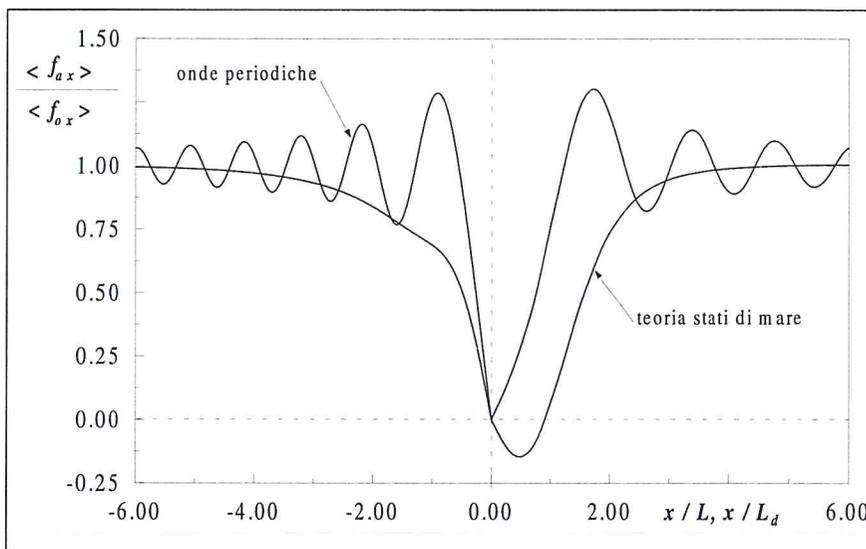


Figura 6 - Ancora il rapporto  $\langle f_{ax} \rangle / \langle f_{ox} \rangle$  per:  $b/L = 2, \theta = 10^\circ$  e  $b/L_d = 2, \theta_d = 10^\circ$ .

### La linea di tendenza della deformazione

Le Figure 7 e 8 mostrano la linea di tendenza della deformazione, ovvero la  $\partial y / \partial t$  all'istante  $t = 0$  (inizio azione onde), in funzione dell'ascissa  $x$  lungo-costa. In particolare: la Figura 7 è stata ottenuta sostituendo nell'eq. [10] ad  $\langle f_{ax} \rangle$  i valori della forza indicata nella Figura 5 (la figura quindi si riferisce ad un pennello di lunghezza relativa pari a 1, attaccato da onde inclinate di  $30^\circ$  rispetto alla battigia); la Figura 8 invece è stata ottenuta sostituendo ad  $\langle f_{ax} \rangle$  i valori della forza indicata in Figura 6 (la figura quindi si riferisce ad un pennello di lunghezza relativa pari a 2, attaccato da onde inclinate di  $10^\circ$  rispetto alla battigia).

Nel caso delle onde di vento il pennello produce un notevole avanzamento della spiaggia dalla parte battuta dalle onde ( $x < 0$ ) e una conseguente erosione dal lato protetto ( $x > 0$ ).

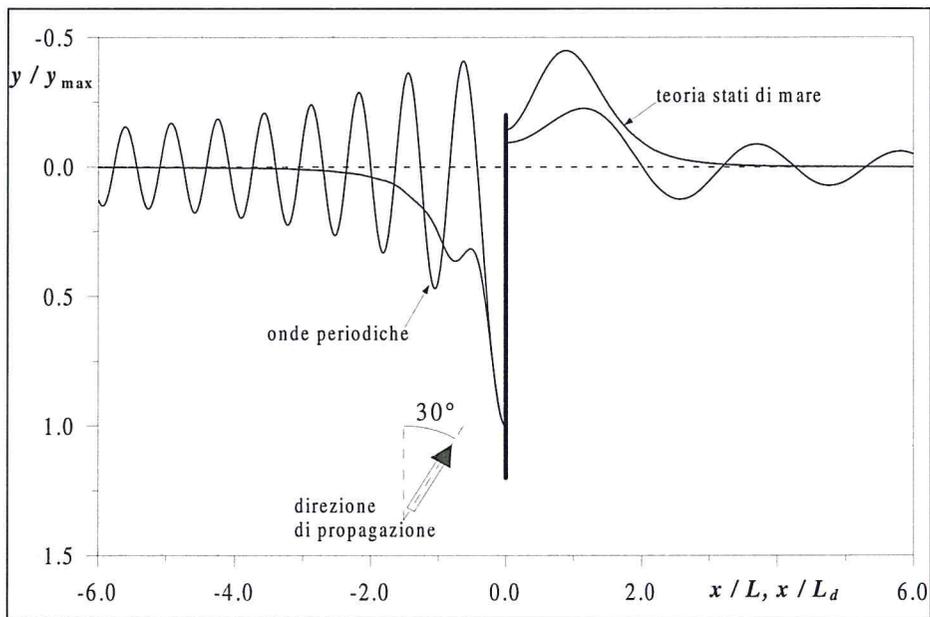


Figura 7 - Profili deformati della linea di battigia ottenuti utilizzando i dati riportati in Figura 5.

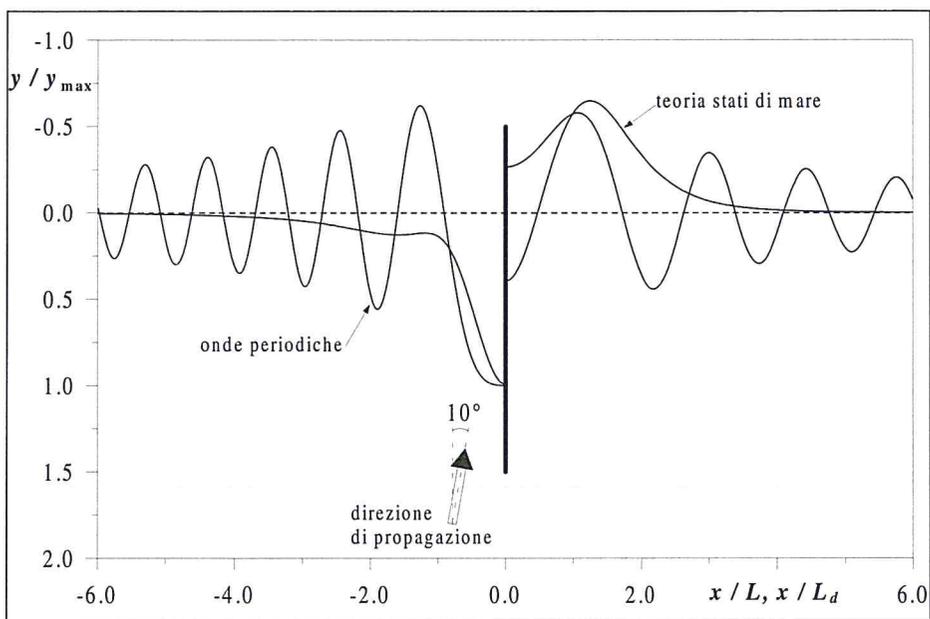


Figura 8 - Profili deformati della linea di battigia ottenuti utilizzando i dati riportati in Figura 6.

Inoltre la zona in avanzamento raggiunge il massimo proprio a ridosso del pennello; la massima erosione invece ha luogo discosta da esso a circa una lunghezza d'onda di distanza.

Per contro i profili deformati ottenuti con le onde periodiche appaiono poco realistici. Infatti la deformazione della spiaggia si protende, alternando tratti in avanzamento a tratti in erosione, fino a grandi distanze dal pennello.

## Conclusioni

Si è fatto uso di un recente modello analitico per prevedere la deformazione tendenziale del litorale conseguente alla realizzazione di un pennello ortogonale alla costa. L'ipotesi di base del modello consiste nell'assimilare l'azione di trascinamento esercitata dal moto ondoso sul fondale all'azione su di una barriera verticale perfettamente assorbente. Tale azione viene calcolata applicando la teoria delle *radiation stresses* al campo di onde interagenti col pennello.

Il modello è stato applicato sia con la teoria delle onde periodiche sia con la teoria degli stati di mare. Si sono trovate differenze significative come si vede, per esempio, confrontando tra loro le due curve di Figura 7. In particolare, i profili deformati ottenuti con la teoria degli stati di mare appaiono più realistici, e consentono di cogliere le caratteristiche essenziali del fenomeno, tra cui: estensioni del tratto di costa in avanzamento e del tratto in erosione, localizzazione del massimo avanzamento e della massima erosione, ed entità del loro rapporto.

## Bibliografia

- Boccotti P. (1988) - *Refraction, reflection and diffraction of irregular gravity waves*. Excerpta of the Italian Contribution to the Field Hydraulic Engineering, 3, pp 47-89.
- Boccotti P. (1997) - *Idraulica Marittima*. Ed. UTET, Torino.
- Dean R. G. (1992) - *Beach nourishment: Design Principles*. Proc. Short Course attached to the 23<sup>th</sup> Int. Conf. Coastal Engng., pp 301-349.
- Filianoti P. (1995) - *L'evoluzione del litorale conseguente alla realizzazione di un molo di grande sviluppo longitudinale: trattazione dettagliata*. Facoltà di Ingegneria, Reggio Calabria.
- Hasselmann K., Barnett T. P., Bouws E. e al. (1973) - *Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP)*. Deut. Hydrog. Zeit., A(8), pp 1-95.
- Longuet-Higgins M. S. (1963) - *The effects of non linearities on statistical distribution in the theory of sea waves*. J. Fluid. Mech., 17, pp 459-480.
- Longuet-Higgins (1970) - *Longshore currents generated by oblique incident waves*, 1. J. Geoph. Res., 75, pp. 6778-6789.
- Mitsuyasu H., Tasai F., Suhara T. e al. (1975) - *Observation of direction Spectrum of ocean waves using a cloverleaf buoy*. J. Phys. Oceanogr., 5, pp 750-760.
- Pelnard-Considère (1954) - *Essai de théorie de l'évolution des forms de rivages en plage de sable et de galets*. Quatrième Journées de l'Hydraulique, les Energies de la Mer, Question III, Rapport N 1, pp 289-298.
- Penny W. G. e Price A.T. (1952) - *The diffraction of sea waves by breakwater*. Phil. Trans. Roy. Soc., A-244, pp 236-253.
- Phillips O. M. (1967) - *The theory of wind generated waves*. Advances in Hydrosience, 4, pp 119-149.