

Espressione analitica della formula di Hsu ed Evans per baie in equilibrio statico

Mario Mita

via Giuseppe Allievo, 63 - 00135 Roma
Tel./Fax 063241419, Email: mario_mita@fastwebnet.it

Riassunto

Nella presente memoria viene proposta una modifica dell'espressione analitica fornita da Hsu ed Evans per baie in equilibrio statico. L'espressione proposta rispetta la "condizione di intaccatura" della baia ricavata sperimentalmente da Hsu et al. (1989a, 1989b) e risulta quindi corretta dal punto di vista teorico.

Parole chiave: baia in equilibrio, angolo critico, rapporto di intaccatura.

Abstract

This paper presents a modification of Hsu and Evans equation of bayed beaches in static equilibrium. The proposed equation accounts for the bayed beach "indentation ratio", which has been determined from both model tests and prototype bays by Hsu et al. (1989a, 1989b), and so it results theoretically correct.

Keywords: bayed beach in equilibrium, critical angle, indentation ratio.

Premessa

La conformazione a spirale assunta da una baia dipende essenzialmente dalla posizione dei capi rocciosi (o delle opere marittime) che la delimitano, dall'apporto di materiale solido sedimentario e dal moto ondoso incidente.

A partire dalla descrizione della forma dalle baie effettuata da Krumbein (1947), Silvester (1970) ha osservato che le baie in equilibrio statico (spiagge con trasporto solido netto nullo) o dinamico (spiagge con trasporto solido netto uniforme) assumono una forma caratteristica che dipende unicamente dalla posizione dei capi che la delimitano e dalla direzione delle onde incidenti predominanti.

Numerose esperienze di campo e su modello fisico sono state eseguite considerando diverse altezze e lunghezze d'onda e diversa natura e dimensione del sedimento costituente la spiaggia, senza individuare alcuna influenza sulla forma assunta dalla baia in equilibrio.

Non è stata ancora individuata una relazione che fissi l'esatta posizione del centro della spirale sebbene tale punto sia localizzato in prossimità dell'estremità del capo roccioso.

Per individuare la conformazione di equilibrio assunta da una baia, Silvester ha introdotto un parametro adimensionale denominato "rapporto di intaccatura" (*indentation ratio*), che deve assumere determinati valori in funzione della direzione delle onde incidenti predominanti e della posizione dei capi che delimitano la baia.

In sostituzione all'espressione della spirale logaritmica proposta da Silvester (1970), Hsu ed Evans (1989) hanno presentato un'equazione polinomiale del secondo ordine, basata su tre parametri sperimentali determinati da misure di campo e modelli fisici sperimentali.

Tan e Chew (1994) hanno osservato che l'equazione della spirale proposta da Hsu ed Evans non rispetta alcune condizioni teoriche dell'espressione originaria di Hsu e Silvester (1987) e hanno suggerito un'equazione polinomiale del secondo ordine basata su un solo parametro sperimentale. L'equazione proposta in questo articolo esprime il parametro sperimentale di Tan e Chew, mediante l'espressione del rapporto di intaccatura della baia in equilibrio ricavata sperimentalmente da Hsu et al. (1989a, 1989b).

Formulazioni precedenti dell'espressione della forma di una baia in equilibrio statico

Con riferimento alla Figura 1 si indica con:

- F il punto di diffrazione, centro della spirale;
- P_o il punto della linea di costa il cui orientamento è parallelo alla direzione delle creste d'onda;
- β l'angolo formato dalle creste delle onde persistenti sul litorale con la retta che congiunge il punto di diffrazione F con il punto P_o ;
- R_o la distanza fra il punto F e il punto P_o ;
- P il punto generico sulla linea di riva;
- θ l'angolo formato dalla direzione delle creste d'onda con il segmento FP;
- R la distanza tra il generico punto P e il punto di diffrazione F;
- P_c il punto critico in cui la retta tangente alla baia in equilibrio è parallela al segmento FP_o ;
- a la distanza fra la retta passante per F e P_o e la retta passante per P_c parallela al segmento FP_o stesso;
- θ_c l'angolo formato dalla direzione delle creste d'onda con il segmento FP_c ;
- R_c la distanza tra il punto P_c e il punto di diffrazione F;
- $(\theta_c - \beta)$ l'angolo critico;
- a/R_o rapporto di intaccatura di una spiaggia in equilibrio.

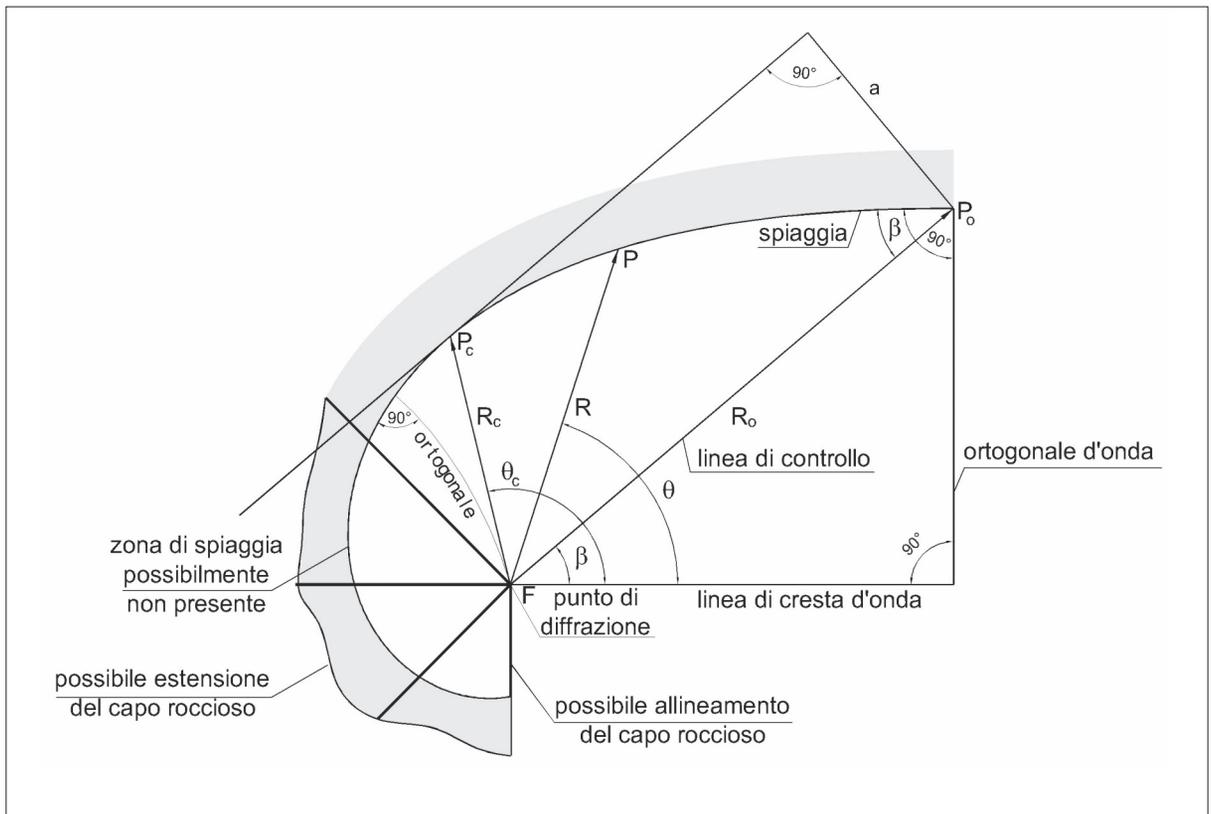


Figura 1 - Forma della spiaggia in equilibrio secondo Silvester.

L'approccio suggerito Hsu e Silvester (1987) si basa sull'osservazione che la forma delle baie in equilibrio statico o dinamico delimitate da un capo roccioso o da un'opera marittima dipende unicamente dall'angolo β e dalla distanza R_o .

Inoltre Hsu e Silvester hanno osservato che il rapporto di intaccatura di una spiaggia e l'angolo critico sono funzioni unicamente dell'angolo β . In particolare hanno ricavato che l'angolo θ_c è funzione lineare di β secondo l'espressione:

$$\theta_c = \theta_{co} + m \beta = 63^\circ + 1.04\beta \tag{1}$$

con θ_{co} il valore dell'angolo θ_c per $\beta = 0$ e m coefficiente angolare.

Hsu ed Evans (1989), esaminando una serie di baie in equilibrio sulle coste giapponesi ed australiane ed esaminando i risultati ottenuti in vasca su modello fisico da Ho (1971), nell'ipotesi di esprimere in coordinate polari la forma della linea di riva delle baie in equilibrio con una relazione parabolica, hanno ricavato l'espressione:

$$R/R_o = f(\beta/\theta) = C_0 + C_1(\beta/\theta) + C_2(\beta/\theta)^2 \tag{2}$$

in cui C_0 , C_1 e C_2 sono tre coefficienti funzioni anch'essi dell'angolo β .

In base ai dati di misura disponibili Hsu, Silvester e Xia (1989b) hanno determinato il valore dei coefficienti $C_0 = C_0(\beta)$, $C_1 = C_1(\beta)$ e $C_2 = C_2(\beta)$ come riportato in forma grafica in Figura 2.

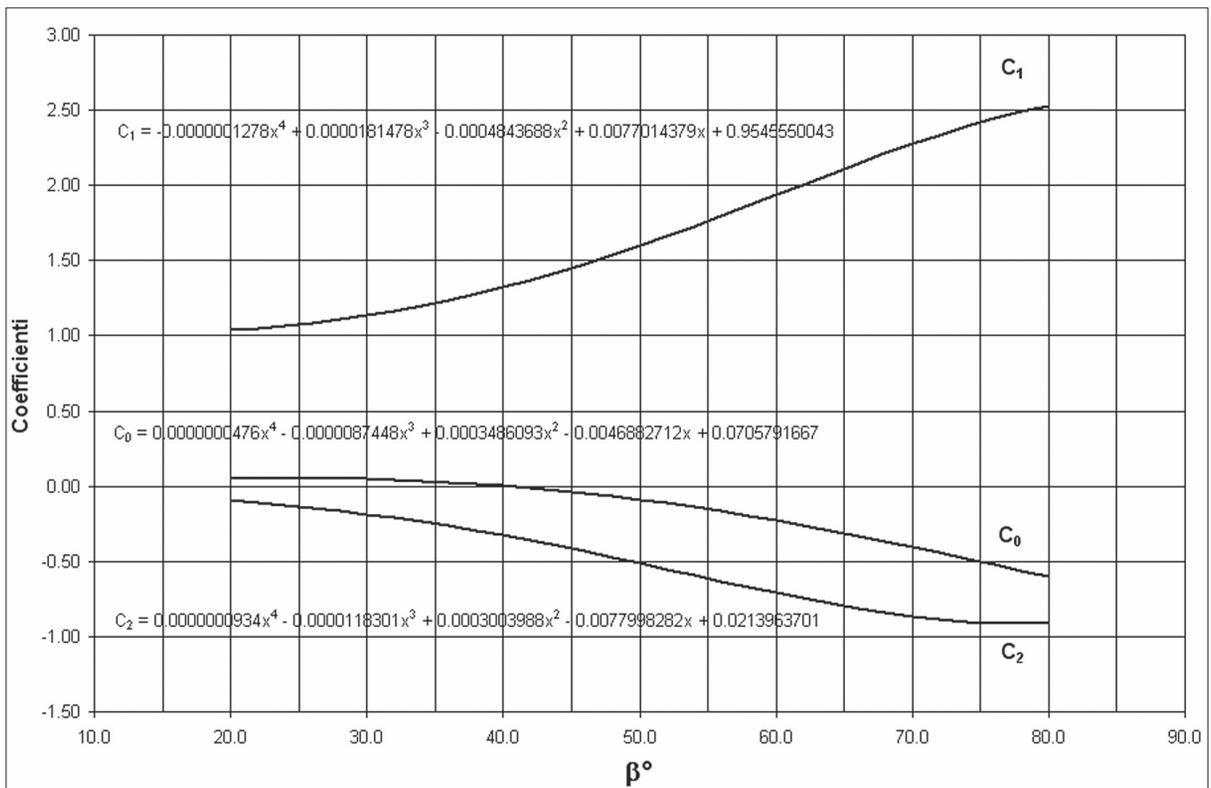


Figura 2 - Valore dei coefficienti C_0 , C_1 e C_2 secondo Hsu, Silvester e Xia (1989b).

In Figura 3 sono riportate le curve per θ costante ottenute da Hsu ed Evans con il valore dei coefficienti da loro determinati.

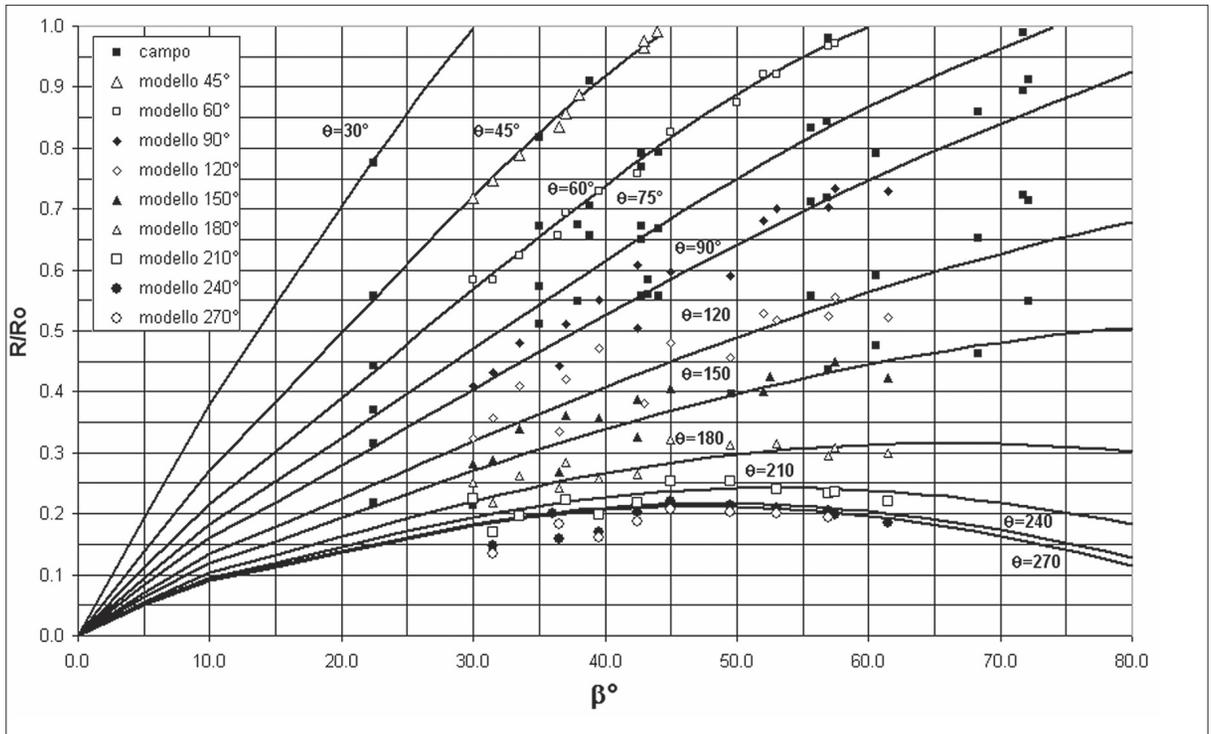


Figura 3 - Dati sperimentali e curve proposte da Hsu ed Evans (1989) per $\theta = \text{cost}$ in funzione dell'angolo β .

Tan e Chiew (1994) hanno osservato che utilizzando i valori dei coefficienti proposti da Hsu ed Evans non sono rigorosamente rispettate le condizioni teoriche valide nel punto P_0 (per $\theta = \beta$) ovvero:

$$C_0 + C_1 + C_2 = 1 \quad (3)$$

$$C_1 + 2 C_2 = \beta \cotg(\beta) \quad (4)$$

dove la prima equazione esprime la condizione che $R = R_0$ nel punto P_0 , mentre la seconda esprime la condizione di parallelismo tra le creste d'onda e la tangente alla curva nel punto P_0 .

Tan e Chiew (1994), sostituendo le equazioni (3) e (4) nella (2) ed esplicitando rispetto a C_2 , hanno ricavato l'espressione:

$$R/R_0 = [1 - \beta \cotg(\beta) + C_2] + [\beta \cotg(\beta) - 2C_2] (\beta/\theta) + C_2 (\beta/\theta)^2 \quad (5)$$

con $C_2 = f(\beta)$. L'espressione di $C_2 = C_2(\beta)$ è stata ricavata interpolando i dati sperimentali di Hsu ed Evans, ottenendo la relazione:

$$\log(0.277 - C_2) = \beta - 1.105 \quad (6)$$

I valori dei coefficienti $C_0 = C_0(\beta)$, $C_1 = C_1(\beta)$ e $C_2 = C_2(\beta)$ ricavati da Tan e Chiew sono riportati in forma grafica in Figura 5, mentre nella Figura 6 sono riportate le curve per $\theta = \text{cost}$ ottenute con i valori così ricavati.

Confrontando le curve per $\theta = \text{cost}$ ottenute da Hsu ed Evans (Fig. 3) con quelle ricavate da Tan e Chiew (Fig. 5) si nota che estrapolando le curve per $\lim \beta \rightarrow 0$ risulta:

- per Hsu ed Evans $R/R_0 = 0.00$
- per Tan e Chiew $R/R_0 = 0.20$

Inoltre confrontando le due figure si evince che le curve di Hsu ed Evans si adattano meglio ai valori sperimentali soprattutto per valori di θ elevati e per valori di β piccoli (vedi ad es. i dati del prototipo di Ho $\beta=22,5^\circ$) ed elevati.

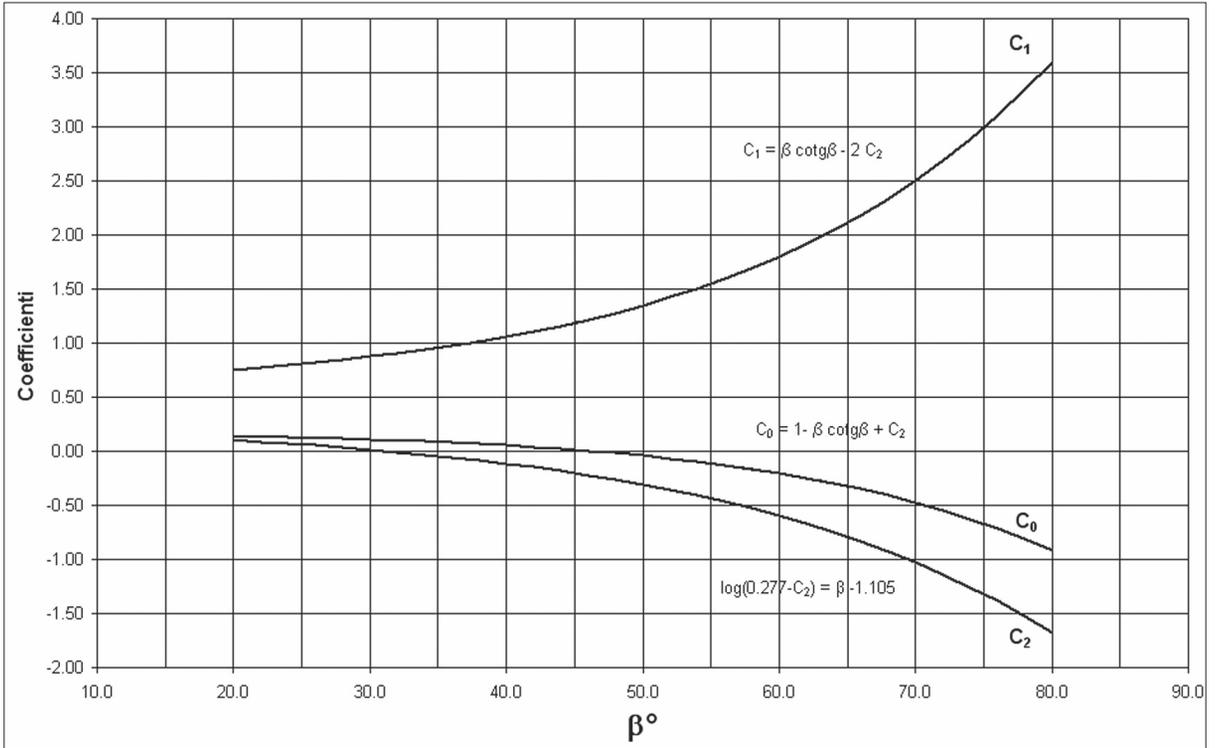


Figura 4 - Valore dei coefficienti C_0 , C_1 e C_2 secondo Tan e Chiew.

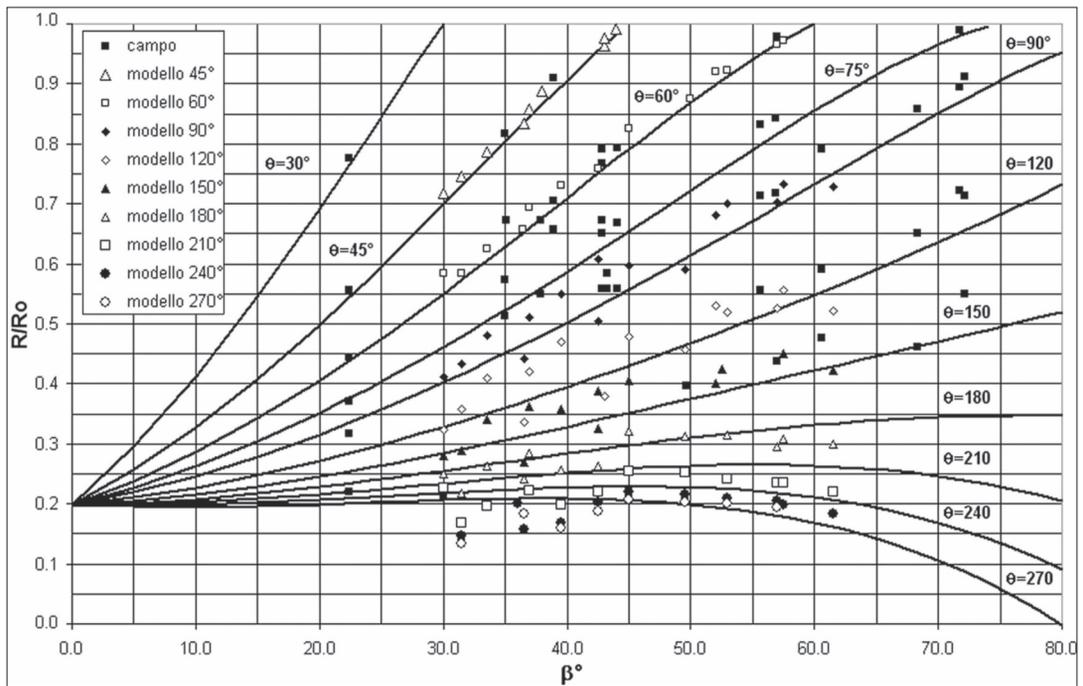


Figura 5 - Dati sperimentali e curve proposte da Tan e Chiew (1994) per θ =cost in funzione dell'angolo β .

In realtà i coefficienti di Hsu ed Evans e quelli di Tan e Chiew dovrebbero soddisfare anche l'equazione (1) dell'angolo critico.

In questo articolo si descrive la procedura seguita per determinare analiticamente la funzione $C_2=C_2(\beta)$ che soddisfa tale condizione.

Espressione analitica del coefficiente C_2 in base all'angolo critico.

Per determinare l'espressione di $C_2=C_2(\beta)$ che soddisfi la condizione (1) del valore dell'angolo critico si definiscono le funzioni:

$$\omega = \theta_c/\beta \quad (7)$$

$$\psi = \beta \cotg(\beta) \quad (8)$$

$$\chi = \theta_c \cotg(\theta_c - \beta) \quad (9)$$

La condizione di tangenza alla curva per $\theta=\theta_c$ è espressa dalla (24) di Appendice, che con l'uso delle funzioni sopra definite può anche essere scritta come:

$$\omega f'(\beta/\theta) = \omega^2 (R/R_0) \chi \quad \text{per } \theta=\theta_c \quad (10)$$

Essendo:

$$f'(\beta/\theta) = C_1 + 2C_2 (\beta/\theta_c) \quad \text{per } \theta=\theta_c \quad (11)$$

sostituendo la (11) e la (2) nella (10) risulta:

$$C_1 \omega + 2C_2 = (C_0 \omega^2 + C_1 \omega + C_2) \chi \quad (12)$$

Dovendo essere per la (4):

$$C_1 = \psi - 2C_2 \quad (13)$$

e per la (3) esprimendo C_1 con la (13):

$$C_0 = 1 - \psi + C_2 \quad (14)$$

Sostituendo la (14) e la (13) nella (12) dopo alcuni passaggi risulta:

$$C_2 = [\chi(\psi-1) \omega^2 - \psi(\chi-1) \omega] / [\chi \omega^2 - 2(\chi-1)\omega + (\chi-2)] \quad (15)$$

Sostituendo nella (14) e nella (13) la (15), sostituendo poi nella (2) le espressioni dei tre coefficienti così ricavate con le notazioni (7), (8) e (9) ed esprimendo θ_c con la (1) si ottiene l'espressione analitica della funzione R/R_0 per valori di dell'angolo β fissati come polinomio di secondo grado in (β/θ) , qui non riportata per motivi di sintesi.

Risultati

I valori dei coefficienti $C_0=C_0(\beta)$, $C_1=C_1(\beta)$ e $C_2=C_2(\beta)$ ricavati utilizzando le espressioni (14), (13) e (15) sono riportati in forma numerica in Tabella I ed in forma grafica in Figura 6.

In Figura 7 si riportano insieme ai dati sperimentali di Hsu ed Evans anche le curve per $\theta=\text{cost}$ ottenute utilizzando le espressioni (14), (13) e (15).

Dall'analisi della Figura 7 si nota che:

- per $\lim \beta \rightarrow 0$ risulta $R/R_0 = 0.00$, come per le curve di Hsu ed Evans di Figura 3;
- le curve per $\theta=\text{cost}$ sono sempre crescenti anche per $\theta > 150^\circ$.

Tabella 1 - Valori dei coefficienti C_0 , C_1 e C_2 che soddisfano le condizioni delle baie in equilibrio per diversi valori di β .

β	C_0	C_1	C_2	R/Ro per $\theta=\beta$	α per $\theta=\beta$	θ_c
20	0.08539	0.87016	0.04444	1.000	20.0	83.80
22	0.08524	0.87915	0.03561	1.000	22.0	85.88
24	0.08409	0.89101	0.02491	1.000	24.0	87.96
26	0.08195	0.90570	0.01235	1.000	26.0	90.04
28	0.07884	0.92321	- 0.00206	1.000	28.0	92.12
30	0.07477	0.94356	- 0.01833	1.000	30.0	94.20
32	0.06971	0.96678	- 0.03649	1.000	32.0	96.28
34	0.06367	0.99289	- 0.05656	1.000	34.0	98.36
36	0.05662	1.02196	- 0.07858	1.000	36.0	100.44
38	0.04853	1.05405	- 0.10258	1.000	38.0	102.52
40	0.03939	1.08923	- 0.12861	1.000	40.0	104.60
42	0.02915	1.12758	- 0.1567..	1.000	42.0	106.68
44	0.01778	1.16920	- 0.18699	1.000	44.0	108.76
46	0.00525	1.21419	- 0.21944	1.000	46.0	110.84
48	- 0.00848	1.26264	- 0.25416	1.000	48.0	112.92
50	- 0.02346	1.31467	- 0.29121	1.000	50.0	115.00
52	- 0.03974	1.37041	- 0.33067	1.000	52.0	117.08
54	- 0.05736	1.42997	- 0.37261	1.000	54.0	119.16
56	- 0.07638	1.49351	- 0.41713	1.000	56.0	121.24
58	- 0.09685	1.56116	- 0.46430	1.000	58.0	123.32
60	- 0.11884	1.63307	- 0.51424	1.000	60.0	125.40
62	- 0.14239	1.70942	- 0.56703	1.000	62.0	127.48
64	- 0.16759	1.79038	- 0.62279	1.000	64.0	129.56
66	- 0.19449	1.87612	- 0.68163	1.000	66.0	131.64
68	- 0.22318	1.96686	- 0.74367	1.000	68.0	133.72
70	- 0.25373	2.06279	- 0.80906	1.000	70.0	135.80
72	- 0.28622	2.16414	- 0.87792	1.000	72.0	137.88
74	- 0.32075	2.27116	- 0.95041	1.000	74.0	139.96
76	- 0.35741	2.38409	- 1.02669	1.000	76.0	142.04
78	- 0.39629	2.50322	- 1.10693	1.000	78.0	144.12
80	- 0.43751	2.62882	- 1.19131	1.000	80.0	146.20

È significativo osservare che le espressioni dei coefficienti della curva ora proposta sono state ricavate indipendentemente dai dati sperimentali utilizzati da Hsu ed Evans, sebbene interpolino tali punti. Nelle formule proposte sono stati invece utilizzati i dati sperimentali che hanno condotto Hsu et al. a determinare l'espressione dell'angolo θ_c in funzione di β . Infatti gli unici dati sperimentali utilizzati per ricavare l'espressione di C_2 sopra riportata sono i valori dell'angolo $\theta_{co}=63^\circ$ e del coefficiente angolare $m=1.04$ della (1), ricavati dagli stessi Hsu et al.

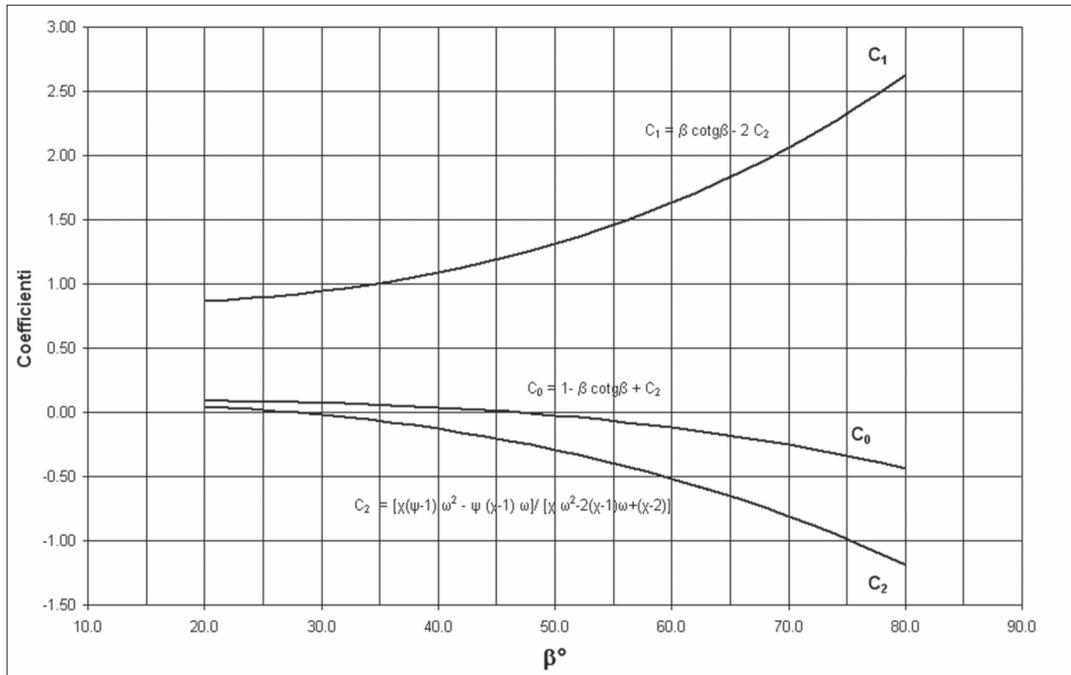


Figura 6 -Valore dei coefficienti C_0 , C_1 e C_2 che soddisfano le condizioni analitiche nel punto P_o e nel punto P_c .

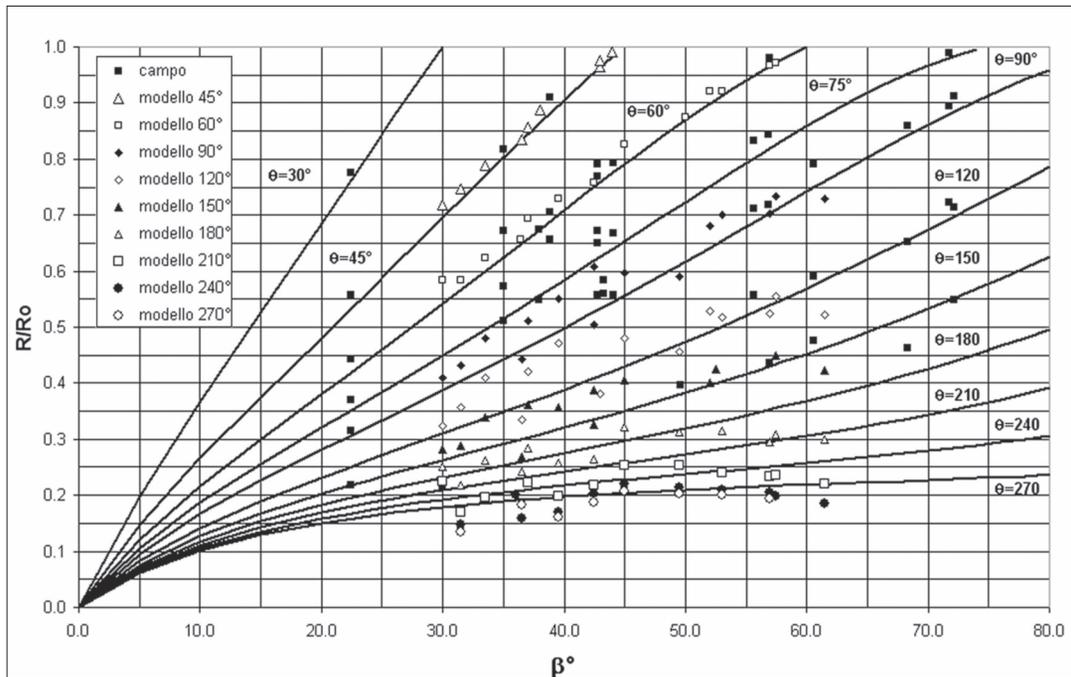


Figura 7 - Dati sperimentali e curve analitiche del polinomio di secondo grado per $\theta = \text{cost}$ in funzione dell'angolo β che soddisfano le condizioni analitiche nel punto P_o e nel punto P_c .

Rapporto di intaccatura

Per le applicazioni ingegneristiche, al fine di individuare la conformazione d'equilibrio di una spiaggia, Silvester (1970) ha suggerito di utilizzare il metodo del rapporto di intaccatura.

Il metodo può essere utilizzato per verificare l'instabilità della spiaggia anche senza tracciare la curva di equilibrio. Esso consiste nel misurare il rapporto di intaccatura e confrontarlo con quello della spiaggia di equilibrio. Se il rapporto di intaccatura è minore di quello di equilibrio la spiaggia risulta instabile.

Silvester ha osservato che il rapporto di intaccatura di una baia in equilibrio dipende unicamente dal valore dell'angolo β .

Infatti dalla Figura 1 si evince che il rapporto di intaccatura è legato al valore dell'angolo critico dalla relazione:

$$a/R_0 = \text{sen}(\theta_c - \beta) R_c / R_0 \tag{16}$$

con $R_c/R_0 = f(\theta_c/\beta)$ e $\theta_c = f(\beta)$

In base ai dati sperimentali su modello di Ho (1971) e a misure di campo di Vichetpan (1969) Silvester ha proposto i valori del rapporto di intaccatura di una baia in equilibrio riportati in Figura 8 (Hsu, Silvester e Xia, 1987).

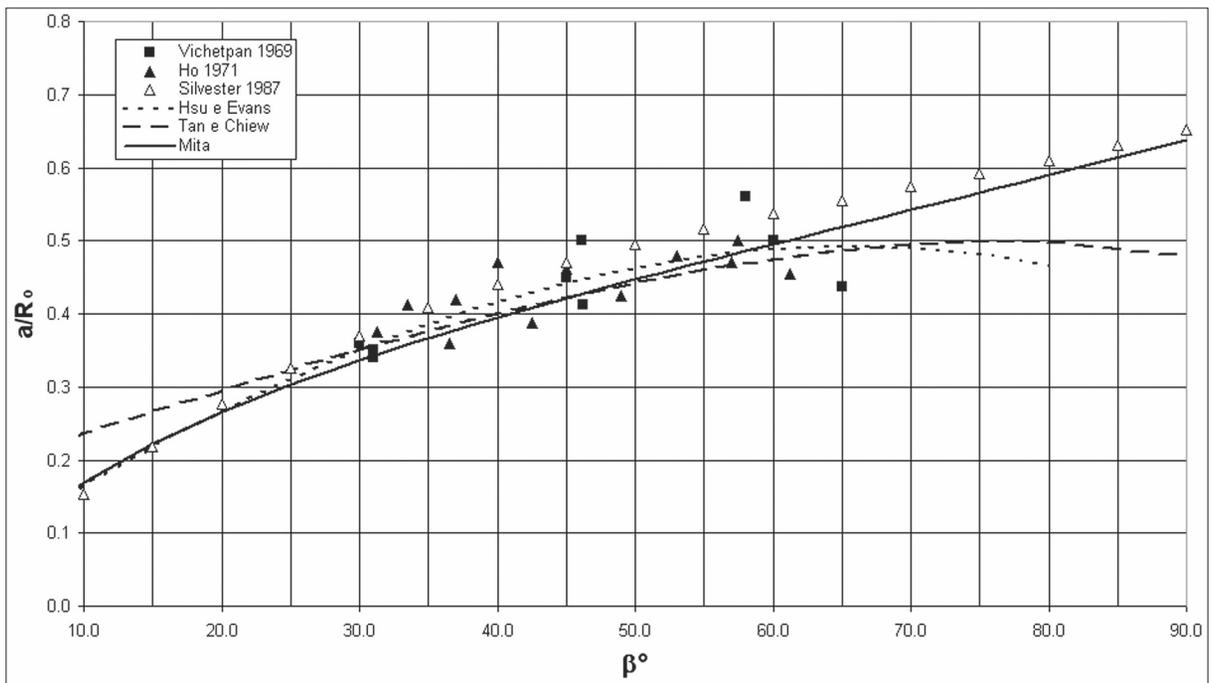


Figura 8 - Rapporto di intaccatura a/R_0 di una baia in equilibrio in funzione di β° per le diverse curve teoriche.

Esprimendo la (16) utilizzando le equazioni (1) e (2) con i valori dei coefficienti proposti da Hsu ed Evans, da Tan e Chiew e da questo articolo si ottengono le curve di Figura 8.

Dall'esame della figura si evince che con i valori dei coefficienti proposti da Tan e Chiew il rapporto di intaccatura si discosta maggiormente da quello proposto da Silvester per valori di $\beta < 25^\circ$ e $\beta > 50^\circ$.

La curva che meglio interpola i valori proposti da Silvester nell'intero intervallo $10^\circ < \beta < 90^\circ$ risulta quella calcolata con i valori dei coefficienti proposti in questo articolo.

Conclusioni

E' stata analizzata l'equazione parabolica in (β/θ) di Hsu ed Evans che fornisce la forma assunta da baie in equilibrio.

L'espressione si adatta bene ai dati sperimentali a disposizione, ma non rispetta rigorosamente le condizioni di:

- 1) passaggio nel punto P_o ;
- 2) parallelismo alla direzione delle creste d'onda nel punto P_o ;
- 3) valore dell'angolo θ_c nel punto critico che individua il rapporto di intaccatura.

Tan e Chew hanno proposto l'espressione che, rispettando le condizioni di:

- passaggio nel punto P_o ;
- parallelismo alla direzione delle creste d'onda nel punto P_o .

meglio si adatta ai dati sperimentali, pur non rispettando la condizione sul valore dell'angolo θ_c nel punto critico. E' stata qui presentata l'espressione parabolica in (β/θ) che ottempera le tre condizioni caratteristiche sopra dette per le baie in equilibrio.

Per le applicazioni ingegneristiche, al fine di individuare la conformazione d'equilibrio di una spiaggia, le equazioni paraboliche che hanno un rapporto di intaccatura più prossimo a quello proposto da Silvester nell'intero dominio $10^\circ < \beta < 90^\circ$ risultano quelle calcolate con i valori dei coefficienti proposti in questo articolo.

Appendice: condizione di tangenza alla curva di equilibrio

In questa sessione si determina la condizione di tangenza alla curva:

$$R = R_o f(\beta/\theta) \quad (17)$$

con β e R_o valori fissati.

Si consideri un punto P appartenente alla curva tale che il segmento FP formi un angolo θ con l'asse delle ascisse. Si consideri ora il punto P' sempre appartenente alla curva tale che il segmento FP' formi un angolo $\theta + d\theta$ con l'asse delle ascisse (vedi Fig. 9).

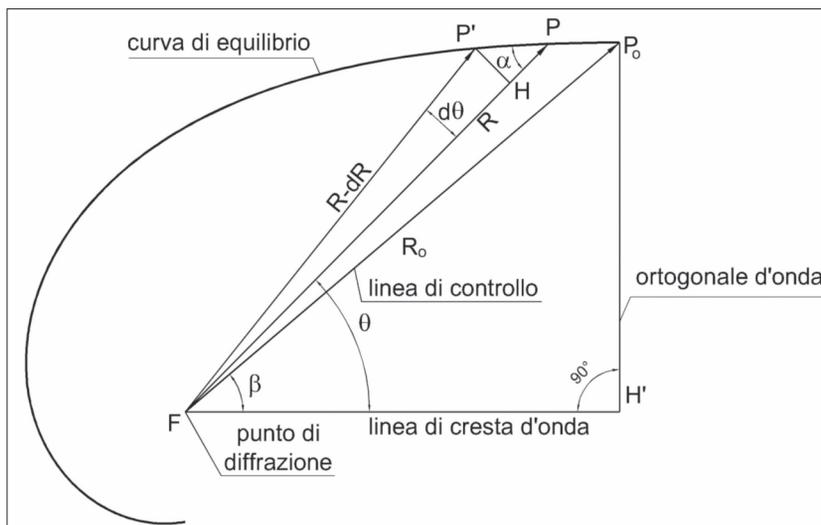


Figura 9 - Determinazione delle condizione di tangenza alla direzione d'onda.

Indicata con H la proiezione di P' sul segmento FP risulta:

- $HP' = R d\theta$
- $HP = dR$

Derivando l'equazione (2) rispetto a θ risulta:

$$- dR/d\theta = - (\beta/\theta^2) R_o f'(\beta/\theta)$$

ovvero:

$$dR = - d\theta (\beta/\theta^2) R_o f'(\beta/\theta) \quad (18)$$

dove dR rappresenta un accorciamento ed è negativo, infatti $R' = R - |dR| < R$ per la natura a spirale dell'equazione (2).

L'angolo α compreso tra i segmenti P'P e HP è tale che:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = HP' / HP = R d\theta / |dR| \quad (19)$$

ovvero:

$$|dR| = R d\theta / \operatorname{tg}(\alpha) \quad (20)$$

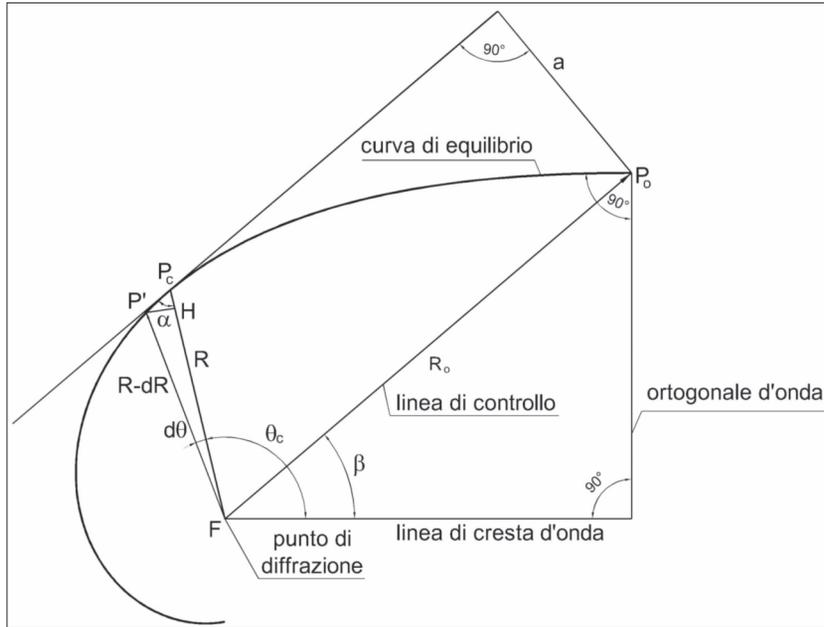


Figura 10 - Determinazione dell'angolo α nel punto critico.

Sostituendo nella (20) l'equazione (18) cambiata di segno risulta:

$$d\theta (\beta/\theta^2) R_0 f'(\beta/\theta) = R d\theta \operatorname{cotg}(\alpha) \quad (21)$$

ovvero:

$$f'(\beta/\theta) = (\theta^2/\beta) (R/R_0) \operatorname{cotg}(\alpha) \quad (22)$$

Nel caso in cui il punto P coincide con il punto P_0 risulta $\theta = \beta$, $R = R_0$ e $\alpha = \beta$, pertanto la (22) si riduce alla:

$$f'(\beta/\theta) = \beta \operatorname{cotg}(\beta) \quad \text{per } \theta = \beta \quad (23)$$

Nel caso in cui $\theta = \theta_c$ dalla Figura 10 risulta $\alpha = \theta_c - \beta$, infatti nel punto P_c dovendo essere il segmento P'P_c parallelo a segmento FP_0 si evince che l'angolo in P_c del triangolo P'P_cH e l'angolo in F = $\theta_c - \beta$ del triangolo P_cFP_0 risultano alterni interni.

La condizione di tangenza alla curva per $\theta = \theta_c$ è espressa dalla (22) sostituendo a θ il valore di θ_c e ad α il valore dell'angolo critico ($\theta_c - \beta$) ovvero:

$$f'(\beta/\theta) = (\theta_c/\beta)^2 (R/R_0) \beta \operatorname{cotg}(\theta_c - \beta) \quad \text{per } \theta = \theta_c \quad (24)$$

Ringraziamenti

Un vivo ringraziamento al prof. Ing. A. Noli per i preziosi suggerimenti.

Bibliografia

- Ho S. K. (1971) - *Cranulate shaped bays*. Asian Inst. Tech Master Eng. Thesis, No 346.
- Hsu J. R., Silvester R. e Xia Y. M. (1987) - *New characteristics of equilibrium shaped bays*. Proc. 8th Aust. Conf. Coast. and Oc. Engrg.: 140-144.
- Hsu J. R. e Evans C. (1989) - *Parabolic bay shapes and applications*. Proc., Institution of Civil Engineers, London, England, Vol. 87: 557-570.
- Hsu J. R., Silvester R. e Xia Y. M. (1989a) - *Generalities on static equilibrium bays*. Coast. Eng., 12: 353-369.
- Hsu J. R., Silvester R. e Xia Y. M. (1989b) - *Static equilibrium bays: new relationships*. J. Wtrwy., Port, Coast., and Oc. Engrg., ASCE, 115: 285-298.
- Krumbein W. C. (1947) - *Shore processes and beach characteristics*. Tech Memo 3, U.S. Army Beach Erosion Board, Washington, D.C.
- Silvester R. (1970) - *Development of cranulate shaped bays to equilibrium*. J. Wtrwy. and Hrbrs Divn., ASCE 96: 275-287.
- Tan S. K. e Chiew Y. M. (1994) - *Analysis of bayed beaches in static equilibrium*. J. Wtrwy., Port, Coast., and Oc. Engrg., ASCE, 1120: 145-153.
- Vichetpan N. (1969) - *Equilibrium shores and coastal design*. Proc. Coast. Sediments '77, ASCE: 1-16.

Ricevuto il 10/01/2008, accettato il 13/03/2008.